

Универзитет у Бањој Луци
Рударски факултет Приједор

Припремна настава за полагање
квалификационог испита из математике

Приједор, мај 2020.године

1. Рационални алгебарски изрази

Задатак бр.1.

Упростити рационални алгебарски израз:

$$\frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{y^2}{x^2-xy^2}$$

Рјешење:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{y^2}{x^2-xy^2} = \\ & = \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{y(x-y)} + \frac{y^2}{x(x-y)} = \\ & = \frac{(x^2+y^2)(x-y) - x \cdot x^2 + y \cdot y^2}{xy(x-y)} = \\ & = \frac{x^3+xy^2-x^2y-y^3-x^3+y^3}{xy(x-y)} = \\ & = \frac{xy^2-x^2y}{xy(x-y)} = \frac{xy(y-x)}{xy(x-y)} = \frac{-(x-y)}{(x-y)} = -1 ; \\ & (x-y) \neq 0 \Rightarrow x \neq y; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{aligned}$$

Задатак бр.2.

Упростити рационални алгебарски израз:

$$\frac{6x+5}{x+5} - \frac{3(2x-1)}{x-5} + \frac{50x}{x^2-25}$$

Рјешење:

$$\begin{aligned} & \frac{6x+5}{x+5} - \frac{3(2x-1)}{x-5} + \frac{50x}{x^2-25} = \\ & = \frac{6x+5}{x+5} - \frac{3(2x-1)}{x-5} + \frac{50x}{(x-5)(x+5)} = \\ & = \frac{6x+5-6x+3+50x}{(x-5)(x+5)} = \frac{50x+8}{(x-5)(x+5)} = \frac{2(25x+4)}{(x-5)(x+5)} \\ & (x-5) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \wedge (x+5) \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \end{aligned}$$

Задатак бр. 3.

Упростити рационални алгебарски израз:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Рјешење:

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x-1} - \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} = \\ & = \frac{2x}{x-1} - \frac{3x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x+1}{x^2+x+1} = \\ & = \frac{2x-3x^2-2x-1+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-3x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ & (x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; (x^2+x+1) \neq 0 \end{aligned}$$

Квадратна једначина $(x^2+x+1) \neq 0$ нема рјешење у скупу реалних бројева.

2. Степеновање и корјеновање

Задатак бр. 4.

Израчунати:

$$\frac{2^{-4} + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^0}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$$

Рјешење:

$$\frac{2^{-4} + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^0}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot 1}{3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 5}{3 - \frac{9}{4}} = \frac{\frac{81}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

Задатак бр. 5.

Упростити израз:

$$A = \frac{1^{-1} + (2)^0}{2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

Рјешење:

$$A = \frac{1^{-1} + (2)^0}{2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}} = \frac{1 + (2)^0}{\frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{1}\right)^1} = \frac{2}{\frac{8 \cdot 27}{3 \cdot 3}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Задатак бр. 6.

Упростити израз:

$$\sqrt{36} + 2\sqrt{25} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32}$$

Рјешење:

$$\sqrt{36} + 2\sqrt{25} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32} = 6 + 2 \cdot 5 + 2 - 2 = 16$$

Задатак бр. 7.

Израчунати:

$$\frac{5x}{a} \sqrt{\frac{3a^2}{50x^2}}$$

Рјешење:

$$\frac{5x}{a} \sqrt{\frac{3a^2}{50x^2}} = \frac{5xa}{ax} \sqrt{\frac{3}{50}} = 5 \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

3. Логаритми

Задатак бр.8.

Израчунати вриједност израза:

$$3^{\log_3 81}$$

Рјешење:

$$3^{\log_3 81} = 3^{\log_3 3^4} = 3^4$$

Задатак бр.9

Израчунати вриједност израза:

$$5^{2 \log_3 5}$$

Рјешење:

$$5^{2 \log_3 5} = 5^{\log_3 5^2} = 25$$

Задатак бр.10

Ако је $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$ израчунати $\log_{45} 100$.

Рјешење:

$$\begin{aligned} \log_{45} 100 &= \frac{\log_5 100}{\log_5 45} = \frac{\log_5 (2^2 \cdot 5^2)}{\log_5 (3^2 \cdot 5)} = \frac{\log_5 2^2 + \log_5 5^2}{\log_5 3^2 + \log_5 5} = \\ &= \frac{2\log_5 2 + 2\log_5 5}{2\log_5 3 + \log_5 5} = \frac{2a + 2}{2b + 1} \end{aligned}$$

Задатак бр.11.

Ријешити по x једначину:

$$\log x = \log 4 + 2 \log 5 + \log 6 - \log 15$$

Рјешење:

$$\log x = \log \frac{4 \cdot 25 \cdot 6}{15}$$

$$\log x = \log 40$$

$$x = 40$$

4. Експоненцијалне једначине

Задатак бр. 12.

Ријешити по x једначину:

$$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$$

$$3^x (2 \cdot 3 - 4 \cdot 3^{-2}) = 450$$

$$3^x \left(6 - 4 \cdot \frac{1}{9}\right) = 450$$

$$3^x \left(6 - \frac{4}{9}\right) = 450$$

$$3^x \left(\frac{50}{9}\right) = 450$$

$$3^x = \frac{450 \cdot 9}{50}$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

Задатак бр. 13.

Ријешити једначину:

$$4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

Рјешење:

$$4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

$$2x = \frac{x+1}{x}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Задатак бр. 14.

Ријешити експоненцијалну једначину:

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$$

Рјешење:

$$2^{2\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$$

Смјена: $2^{\sqrt{x-2}} = t$

$$t^2 + 16 = 10t$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 8; t_2 = 2$$

$$2^{\sqrt{x-2}} = 8; 2^{\sqrt{x-2}} = 2$$

$$D_f: x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2^3; 2^{\sqrt{x-2}} = 2$$

$$\sqrt{x-2} = 3; \sqrt{x-2} = 1$$

$$x - 2 = 9; x - 2 = 1$$

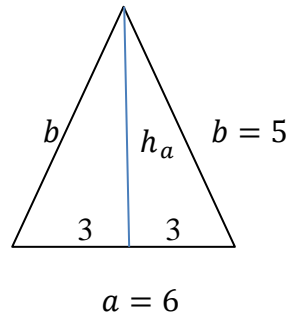
$$x_1 = 11; x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \in D_f$$

Задатак бр. 15.

Израчунати површину једнакокраког троугла чија је основица дужине 6, а крак дужине 5.

Рјешење:



$$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$h_a = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$P = \frac{6 \cdot 4}{2} = 6$$

Задатак бр. 16.

Површине два квадрата односе се као 1:8. Ако је обим већег квадрата $40\sqrt{2}$ cm, одредити обим мањег квадрата.

Рјешење:

$$P_1 : P_2 = 1 : 8$$

$$O_2 = 40\sqrt{2} \text{ cm} \rightarrow 4a_2 = 40\sqrt{2} \rightarrow a_2 = 10\sqrt{2}$$

$$P_2 = (10\sqrt{2})^2 = 200 \text{ cm}^2$$

$$P_1 = \frac{P_2}{8} = \frac{200}{8} = 25 \text{ cm}^2$$

$$a_1 = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$O_2 = ?$$

$$O_2 = 4 \cdot 10\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \text{ cm}$$
